

**ДИНАМИКА ПЕРЕНОСА ГРУЗА НА ТРОСЕ ПРИ ВРАЩЕНИИ ТОЧКИ ЗАКРЕПЛЕНИЯ. ЧАСТЬ 1. ГЕОМЕТРИЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ****Периг А. В., Стадник А. Н., Дериглазов А. И., Подлесный С. В.**

С применением методов классической механики составлена полностью нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений для относительных колебаний сферического маятника с тремя степенями свободы в случае равномерного вращения стрелы крана вокруг фиксированной вертикальной оси вращения в относительных декартовых и относительных сферических координатах. Линеаризованные уравнения раскачивания груза в относительных картезианских координатах обоснованы и выведены с применением динамической теоремы Г. Г. Кориолиса и уравнений Лагранжа второго рода в рамках гипотез о равномерности вращения стрелы крана и малости относительного угла  $\alpha_1$  раскачивания груза.

Із застосуванням методів класичної механіки складено повністю нелінійну систему звичайних диференціальних рівнянь для відносних коливань сферичного маятника із трьома ступенями свободи у випадку рівномірного обертання стріли крану навколо фіксованої вертикальної вісі обертання у відносних декартових та відносних сферичних координатах. Лінеаризовані рівняння розгойдування вантажу у відносних картезіанських координатах обґрунтовані і виведені із застосуванням динамічної теореми Г. Г. Коріоліса та рівнянь Лагранжа другого роду із застосуванням гіпотез щодо рівномірності обертання стріли крану та малості відносного кута  $\alpha_1$  розгойдування вантажу.

The fully non-linear system of ordinary differential equations for relative swaying oscillations of spherical pendulum with three degrees of freedom has been derived through the use of classical and analytical mechanics techniques for the case of uniform crane boom transportable rotation around fixed vertical rotation axis in the relative Cartesian and relative spherical coordinates. The linearized differential equations for payload relative swaying in the relative Cartesian coordinates have been grounded and derived with an introduction of Coriolis dynamical theorem and second-kind Lagrange equations within hypotheses about uniformity of the crane boom transportable rotation and infinitesimality of the relative swaying angle  $\alpha_1$  for payload swaying.

Периг А. В.

канд. техн. наук, доц. каф. АПП ДГМА  
[olexander.perig@gmail.com](mailto:olexander.perig@gmail.com)  
[alex\\_victor\\_perig@hotmail.com](mailto:alex_victor_perig@hotmail.com)

Стадник А. Н.

доц. каф. Техмех ДГМА

Дериглазов А. И.

студент ДГМА

Подлесный С. В.

канд. техн. наук, доц. каф. Техмех ДГМА

ДГМА – Донбасская государственная машиностроительная академия, г. Краматорск.

УДК 531.396, 534.014.4, 534.015.1

Периг А. В., Стадник А. Н., Дериглазов А. И., Подлесный С. В.

**ДИНАМИКА ПЕРЕНОСА ГРУЗА НА ТРОСЕ ПРИ ВРАЩЕНИИ ТОЧКИ ЗАКРЕПЛЕНИЯ. ЧАСТЬ 1. ГЕОМЕТРИЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

Задачи о динамике переноса груза рассматриваются в работах таких отечественных и зарубежных исследователей, как Ловейкин В. С. [1], Кузьмин А. Н. [2], Подобед В. А. [3], Abdel-Rahman E. M. [4], Blajer W. [5], Jerman B. [6], Ju F. [7], Maczynski A. [8], Mitrev R. [9], Sakawa Y. [10] и др. Численные расчеты нелинейных задач о сложном движении сферического маятника требуют привлечения современных методов дифференциально-алгебраических уравнений [5], конечных элементов [7], топологической оптимизации [5], оптимального управления [10] и др. Необходимость установления влияния параметров нелинейных осциллирующих систем на их динамические характеристики при численном анализе требует обработки больших массивов расчетных данных с последующим применением методов регрессионного анализа. Получаемые при этом теоретические зависимости будут носить приближенный характер, что зачастую является не более грубым, чем построение аналитических решений линеаризованных по малому параметру задач. Получение и обработка экспериментальных результатов для нелинейных маятниковых систем также вносит дополнительные погрешности в получаемые эмпирические регрессионные зависимости.

В известных работах [1]–[15] не в полной мере рассматриваются вопросы амплитудно-частотного анализа динамических режимов раскачивания груза с вращающейся точкой закрепления. Остается недостаточно освещенным влияние параметров механической системы «стрела крана – груз» на указанные характеристики. Не полностью раскрыт нелинейный характер силы натяжения троса от кинематических характеристик движения. Всё вышеизложенное определяет актуальность настоящей работы, посвященной механической интерпретации явления раскачивания груза при повороте стрелы крана.

Целью работы является построение нелинейной математической модели сферических колебаний груза с вращающейся точкой подвеса с привлечением декартовых и сферических обобщенных координат. Установление нелинейной зависимости натяжения троса от кинематических характеристик движения будет являться неотъемлемой частью сформулированной модели. Линеаризация уравнений движения обеспечит рассмотрение малых колебаний с построением аналитического решения линеаризованной задачи.

Для постановки нелинейной задачи рассмотрим совместное движение механической системы «стрела крана  $BO_2$  – груз  $M$ », которая представлена на рис. 1. Пускай  $\mathbf{E}$  – это инерциальная ( $O_2x_2y_2z_2$ ) система отсчета (ИСО), жестко связанная с землей. Ортогональные единичные вектора ИСО  $\mathbf{E}$  обозначим как  $\hat{\mathbf{e}}_1$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_2$  и  $\hat{\mathbf{e}}_3$ . Пусть  $\mathbf{B}$  – это неинерциальная ( $O_1x_1y_1z_1$ ) система отсчета (НИСО), связанная с вращающейся стрелой крана  $BO_2$ , причем т.  $O_1$  начала координат совпадает с т.  $A_{st}$  статического равновесия груза  $M$  на тросе  $BM$ . Оорты НИСО  $\mathbf{B}$  обозначим как  $\hat{\mathbf{e}}_1$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_2$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_3$ . Вращение подвижной НИСО  $\mathbf{B}(x_1y_1z_1)$  вокруг фиксированной ИСО  $\mathbf{E}(x_2y_2z_2)$  определяет переносное движение груза  $M$ . Движение груза  $M$  по отношению к подвижной НИСО  $\mathbf{B}(x_1y_1z_1)$  определяет относительное движение груза  $M$ . Точка  $A_{st}$  с координатами  $x_1 = 0$ ;  $y_1 = 0$  и  $z_1 = 0$  является положением устойчивого равновесия для груза  $M$  при неподвижной стреле крана  $BO_2$ . Точка  $A_{dyn}$  с координатами  $x_1 = 0$ ;  $y_1 = y_{dyn}$  и  $z_1 = \Delta$  является положением динамического равновесия груза  $M$  для вращающейся стрелы крана  $BO_2$ . Будем рассматривать точку  $A_{dyn}$  как начало НИСО  $\mathbf{F}(xyz)$ . Направления осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  НИСО  $\mathbf{F}$  параллельны к осям  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$  НИСО  $\mathbf{B}$  на рис. 1. Относительное движение груза  $M$  происходит вдоль поверхности сферы фиксированного радиуса, равного длине троса  $BM = l$ .

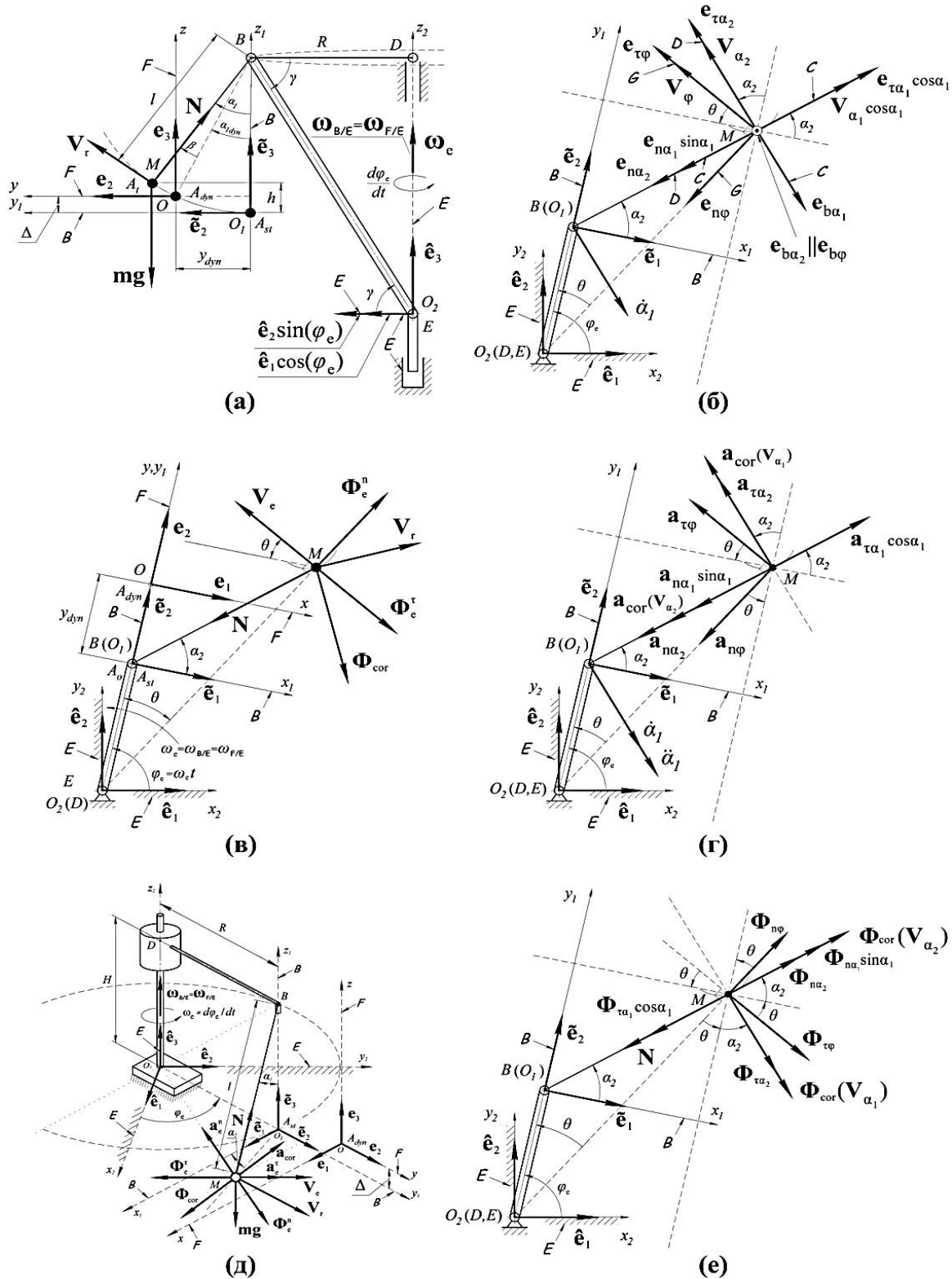


Рис. 1. Расчетные схемы в декартовых (а, в, д) и сферических (б, г, е) координатах для раскачивания груза  $M$ , прикрепленного в т.  $B$  стрелы крана  $BO_2$  на тросе  $MB$ :

а – вертикальная плоскость ( $yz$ ) для силового анализа; б – схема для анализа скоростей в горизонтальной плоскости ( $x_1y_1$ ); в – горизонтальная плоскость ( $x_1y_1$ ) для силового анализа в декартовых координатах; г – схема для анализа ускорений в горизонтальной плоскости ( $x_1y_1$ ); д – пространственная схема для силового анализа; е – горизонтальная плоскость ( $x_1y_1$ ) для силового анализа в сферических координатах

Расчетные схемы на рис. 1(а, в, д) для вывода нелинейной модели в декартовых координатах могут быть описаны с введением трех степеней свободы. В качестве обобщенных координат примем прямоугольные координаты  $x_1, y_1, z_1$  груза  $M$  в движущейся НИСО  $\mathcal{B}$  и угол  $\varphi_e$  поворота стрелы  $BO_2$  крана в горизонтальной плоскости ( $x_1y_1$ ) с угловой скоростью  $\omega_e$  вокруг вертикальной оси  $O_2z_2$ .

Вектор относительной скорости  $\mathbf{V}_r = \mathbf{V}_{M/B}$  груза  $M$  при раскачивании определяется как  $\mathbf{V}_r = \mathbf{V}_{M/B} = (dx_1/dt, dy_1/dt, dz_1/dt)$ , где  $\mathbf{V}_{M/B}$  – это скорость точки  $M$  в НИСО  $\mathcal{B}$ .

Пусть  $\mathbf{V}_{M/E}$  – это скорость т.  $M$  в ИСО  $\mathcal{E}$ , т. е. абсолютная скорость груза  $M$ . Пусть  $\mathbf{r}$  – это радиус-вектор, соединяющий начальную т.  $O_2$  и конечную т.  $B$  в НИСО  $\mathcal{B}$ .

$$\mathbf{r}_{O_2/M} = \mathbf{r}_{O_2/B} + \mathbf{r}_{B/M}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{r}_{O_2/B}$  и  $\mathbf{r}_{B/M}$  – это радиус-векторы, проведенные из т.  $O_2$  в т.  $B$  и из т.  $B$  в т.  $M$  в НИСО  $\mathcal{B}$ . Согласно рис. 1(а, в, д) запишем следующие соотношения для разложения радиус-векторов  $\mathbf{r}_{O_2/B}$  и  $\mathbf{r}_{B/M}$  в (1) по ортам ИСО  $\mathcal{E}$  и НИСО  $\mathcal{B}$ :

$$\mathbf{r}_{O_2/B} = (R \cos(\varphi_e)) \hat{\mathbf{e}}_1 + (R \sin(\varphi_e)) \hat{\mathbf{e}}_2 + (R \operatorname{tg}(\gamma)) \hat{\mathbf{e}}_3; \quad (2)$$

$$\mathbf{r}_{B/M} = x_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + y_1 \tilde{\mathbf{e}}_2 + (z_1 - l) \tilde{\mathbf{e}}_3, \quad (3)$$

где  $R = BD$  – это проекция стрелы крана на горизонтальную плоскость ( $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ );  $l = l_{BM} = \|\mathbf{r}_{B/M}\|$  – это длина троса, т. е. модуль радиус-вектора  $\mathbf{r}_{B/M}$ ;  $\varphi_e = \angle(\hat{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2)$  – это угол поворота НИСО  $\mathcal{B}$  вокруг оси  $O_2z_2$  ИСО  $\mathcal{E}$ , т. е. угол переносного вращения стрелы  $BO_2$  крана вокруг вертикальной оси  $O_2z_2$ ;  $\gamma$  – это угол между радиус-вектором  $\mathbf{r}_{O_2/B}$  и горизонтальной плоскостью ( $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ ) или ( $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2$ ), т. е. угол наклона стрелы  $O_2B$  крана с горизонтальной плоскостью ( $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ ) или ( $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2$ ). Для дальнейшего определения радиус-вектора  $\mathbf{r}_{O_2/M}$  в ИСО  $\mathcal{E}$ , запишем орты НИСО  $\mathcal{B}$  через орты ИСО  $\mathcal{E}$ :

$$\tilde{\mathbf{e}}_1 = (\sin(\varphi_e)) \hat{\mathbf{e}}_1 - (\cos(\varphi_e)) \hat{\mathbf{e}}_2; \quad (4)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_2 = (\cos(\varphi_e)) \hat{\mathbf{e}}_1 + (\sin(\varphi_e)) \hat{\mathbf{e}}_2; \quad (5)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_3. \quad (6)$$

После подстановки формул (2) – (6) в (1) и алгебраических преобразований векторное уравнение (1) для радиуса-вектора  $\mathbf{r}_{O_2/M}$  в ИСО  $\mathcal{E}$  примет следующий вид:

$$\mathbf{r}_{O_2/M} = ((R + y_1)\cos(\varphi_e) + x_1 \sin(\varphi_e)) \hat{\mathbf{e}}_1 + ((R + y_1)\sin(\varphi_e) - x_1 \cos(\varphi_e)) \hat{\mathbf{e}}_2 + (R \operatorname{tg}(\gamma) + z_1 - l) \hat{\mathbf{e}}_3. \quad (7)$$

Абсолютную скорость груза  $M$  определим как производную по времени от выражения (7), предполагая постоянство ортов  $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$  в ИСО  $\mathcal{E}$ , а также постоянство  $R$  и  $\gamma$ :

$$\mathbf{V}_{M/E} = \mathbf{V}_{\text{abs}} = d(\mathbf{r}_{O_2/M})/dt. \quad (8)$$

После дифференцирования и алгебраических преобразований в (7) и (8) мы получаем следующее векторное выражение для абсолютной скорости груза  $M$  в ИСО  $\mathcal{E}$ :

$$\mathbf{V}_{M/E} = (((dy_1/dt) + x_1(d\varphi_e/dt))\cos(\varphi_e) + ((dx_1/dt) - (R + y_1)(d\varphi_e/dt))\sin(\varphi_e)) \hat{\mathbf{e}}_1 + + (((dy_1/dt) + x_1(d\varphi_e/dt))\sin(\varphi_e) + ((R + y_1)(d\varphi_e/dt) - (dx_1/dt))\cos(\varphi_e)) \hat{\mathbf{e}}_2 + (dz_1/dt) \hat{\mathbf{e}}_3. \quad (9)$$

Квадрат абсолютной скорости груза  $M$  может быть записан как:

$$V_{abs}^2 = \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_e}{dt}\right)^2 (x_1^2 + (y_1 + R)^2) + 2\left(\frac{d\varphi_e}{dt}\right) \left(x_1 \left(\frac{dy_1}{dt}\right) - (y_1 + R) \left(\frac{dx_1}{dt}\right)\right). \quad (10)$$

После алгебраических преобразований представим квадрат абсолютной скорости как:

$$(\mathbf{V}_{M/E}, \mathbf{V}_{M/E}) = V_{abs}^2 = \left(\left(\frac{dx_1}{dt}\right) - \left(\frac{d\varphi_e}{dt}\right)(R + y_1)\right)^2 + \left(\left(\frac{dy_1}{dt}\right) + \left(\frac{d\varphi_e}{dt}\right)x_1\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2. \quad (11)$$

Алгебраические выражения (10) и (11) могут быть получены на основании теоремы о сложении скоростей при сложном движении груза  $M$  в ИСО  $\mathbf{E}$  через орты НИСО  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{V}_{M/E} = \mathbf{V}_{M/B} + \mathbf{V}_{O_2/E} + \boldsymbol{\omega}_{B/E} \times \mathbf{r}_{O_2/M}, \quad (12)$$

где вектор  $\mathbf{V}_{M/B} = \mathbf{V}_{M/F} = \mathbf{V}_r$  – это скорость груза  $M$  в НИСО  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{F}$ , т. е. относительная скорость т.  $M$ ;

вектор  $\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_{O_2/E} + \boldsymbol{\omega}_{B/E} \times \mathbf{r}_{O_2/M}$  – это переносная скорость груза  $M$  в ИСО  $\mathbf{E}$ ,

вектор  $\boldsymbol{\omega}_{B/E} = \boldsymbol{\omega}_{F/E} = \boldsymbol{\omega}_e = (d\varphi_e/dt)\hat{\mathbf{e}}_3$  – это вектор переносной угловой скорости для НИСО  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{F}$  по отношению к ИСО  $\mathbf{E}$ ,

$\varphi_e = \angle(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2)$  – это угол поворота НИСО  $\mathbf{B}$  вокруг оси  $O_2z_2$  ИСО  $\mathbf{E}$ , т. е. угол переносного вращения стрелы  $BO_2$  крана вокруг вертикальной оси  $O_2z_2$ .

В (12) относительная скорость груза в НИСО  $\mathbf{B}$  может быть записана как:

$$\mathbf{V}_{M/B} = \mathbf{V}_r = \left(\frac{dx_1}{dt}\right) \hat{\mathbf{e}}_1 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right) \hat{\mathbf{e}}_2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right) \hat{\mathbf{e}}_3. \quad (13)$$

Скорость  $\mathbf{V}_{O_2/E}$  т.  $O_2 =$  т.  $E$  в ИСО  $\mathbf{E}$ , равна нулю:

$$\mathbf{V}_{O_2/E} = 0. \quad (14)$$

Последнее слагаемое в (12) является векторным произведением  $\boldsymbol{\omega}_{B/E} \times \mathbf{r}_{O_2/M}$ , где вектор угловой скорости стрелы  $\boldsymbol{\omega}_{B/E} = (d\varphi_e/dt) \hat{\mathbf{e}}_3$  (6) и радиус-вектор  $\mathbf{r}_{O_2/M}$  в НИСО  $\mathbf{B}$  есть:

$$\mathbf{r}_{O_2/M} = x_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + (y_1 + R) \hat{\mathbf{e}}_2 + z_1 \hat{\mathbf{e}}_3. \quad (15)$$

Принимая во внимание (13)–(15) векторное уравнение (12) в ИСО  $\mathbf{E}$ , записанное через орты  $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$  в НИСО  $\mathbf{B}$  принимает следующий вид:

$$\mathbf{V}_{M/E} = \left(\left(\frac{dx_1}{dt}\right) - \left(\frac{d\varphi_e}{dt}\right)(R + y_1)\right) \hat{\mathbf{e}}_1 + \left(\left(\frac{dy_1}{dt}\right) + \left(\frac{d\varphi_e}{dt}\right)x_1\right) \hat{\mathbf{e}}_2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right) \hat{\mathbf{e}}_3. \quad (16)$$

Т. о. из (16) получаем выражение для квадрата абсолютной скорости груза  $M$ :

$$(\mathbf{V}_{M/E}, \mathbf{V}_{M/E}) = V_{abs}^2 = \left(\left(\frac{dx_1}{dt}\right) - \left(\frac{d\varphi_e}{dt}\right)(R + y_1)\right)^2 + \left(\left(\frac{dy_1}{dt}\right) + \left(\frac{d\varphi_e}{dt}\right)x_1\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2. \quad (17)$$

Независимо выведенные выражения для скалярного произведения  $(\mathbf{V}_{M/E}, \mathbf{V}_{M/E})$  в (11) и (17) полностью совпадают, что подтверждает корректность записи и вывода абсолютной скорости  $\mathbf{V}_{M/E}$  и показывает, что скалярное произведение  $(\mathbf{V}_{M/E}, \mathbf{V}_{M/E})$  является инвариантным выражением, не зависящим от выбора ИСО.

Второе и третье слагаемые уравнения (12) в НИСО  $\mathbf{B}$  определяют вектор переносной скорости груза  $M$  как:

$$\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_{O_2/E} + \boldsymbol{\omega}_{B/E} \times \mathbf{r}_{O_2/M}. \quad (18)$$

Принимая во внимание (14) скаляр переносной скорости груза  $M$  определяется как

$$V_e = \omega_{B/E} \|\mathbf{r}_{O_2/M}\|. \quad (19)$$

Вектор переносной скорости  $\mathbf{V}_e$  перпендикулярен к  $\mathbf{r}_{O_2/M}$  и  $\mathbf{r}_{D/M}$  на рис. 1(а, в, д), т. е.:

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}_e, \mathbf{r}_{O_2/M}) &= (\mathbf{V}_{O_2/E} + \boldsymbol{\omega}_{B/E} \times \mathbf{r}_{O_2/M}, \mathbf{r}_{O_2/M}) = 0; \\ (\mathbf{V}_e, \mathbf{r}_{D/M}) &= (\mathbf{V}_{O_2/E} + \boldsymbol{\omega}_{B/E} \times \mathbf{r}_{O_2/M}, \mathbf{r}_{D/M}) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

На рис. 1 введен текущий угол  $\theta = \angle(\tilde{\mathbf{e}}_2, (\mathbf{r}_{O_2/M})_{x_1y_1})$  – это угол между вертикальной плоскостью, связанной со стрелой  $O_2B$  крана и вертикальной плоскостью, связанной с радиус-вектором  $\mathbf{r}_{O_2/M}$  груза  $M$  в ИСО  $\mathbf{E}$ .

$$\sin(\theta) = x_1/\|\mathbf{r}_{O_2/M}\|; \cos(\theta) = (R+y_1)/\|\mathbf{r}_{O_2/M}\|. \quad (21)$$

В НИСО  $\mathbf{B}$  вектор переносной скорости  $\mathbf{V}_e$  груза  $M$  определяется как:

$$\mathbf{V}_e = (-\|\mathbf{V}_e\| \cos(\theta)) \tilde{\mathbf{e}}_1 + (\|\mathbf{V}_e\| \sin(\theta)) \tilde{\mathbf{e}}_2. \quad (22)$$

Принимая во внимание (19), уравнение (22) примет следующий вид:

$$\mathbf{V}_e = (-\omega_{B/E} \|\mathbf{r}_{O_2/M}\| \cos(\theta)) \tilde{\mathbf{e}}_1 + (\omega_{B/E} \|\mathbf{r}_{O_2/M}\| \sin(\theta)) \tilde{\mathbf{e}}_2. \quad (23)$$

Учитывая (21), уравнение (23) примет следующий вид в НИСО  $\mathbf{B}$ .

$$\mathbf{V}_e = \left( -\left( \frac{d\varphi_e}{dt} \right) (R+y_1) \right) \tilde{\mathbf{e}}_1 + \left( \left( \frac{d\varphi_e}{dt} \right) x_1 \right) \tilde{\mathbf{e}}_2. \quad (24)$$

Принимая во внимание (13) и (24), применение формулы (12) приводит снова к уравнениям (16) и (17). Т.о. квадрат абсолютной скорости груза  $M$ , приведенный в формулах (10), (11) и (17) был получен тремя независимыми методами, что подтверждает корректность соотношений (10), (11) и (17).

Расчетные схемы на рис. 1 (б, г, е) для вывода нелинейной модели в сферических координатах могут быть описаны с введением трех НИСО  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{G}$ . Пусть  $\mathbf{C}(\mathbf{e}_{\tau\alpha_1}, \mathbf{e}_{n\alpha_1}, \mathbf{e}_{b\alpha_1})$  – это естественная сопутствующая НИСО, соответствующая углу раскачивания  $\alpha_1$ , жестко связанная с грузом  $M$ , нормаль  $\mathbf{e}_{n\alpha_1}$  которой направлена из т.  $M$  в т.  $B$  и образует с вертикалью угол  $\alpha_1$ . Поэтому на рис. 1, б показана проекция этой нормали как  $\mathbf{e}_{n\alpha_1} \sin(\alpha_1)$ , т. к. это проекция нормали  $\mathbf{e}_{n\alpha_1}$  на горизонтальную плоскость  $(x_1y_1)$ . Соответственно проекция касательной  $\mathbf{e}_{\tau\alpha_1}$  на горизонтальную плоскость  $(x_1y_1)$  на рис. 1, б обозначена как  $\mathbf{e}_{\tau\alpha_1} \cos(\alpha_1)$ .

Пусть  $\mathbf{D}(\mathbf{e}_{\tau\alpha_2}, \mathbf{e}_{n\alpha_2}, \mathbf{e}_{b\alpha_2})$  – это естественная сопутствующая НИСО, соответствующая углу раскачивания  $\alpha_2$ , жестко связанная с грузом  $M$ , нормаль  $\mathbf{e}_{n\alpha_2}$  направлена из т.  $M$  к проекции т.  $B$  (т.  $O_1$ ) на горизонтальную плоскость  $(x_1y_1)$ . Соответственно бинормаль  $\mathbf{e}_{b\alpha_2}$  направлена вертикально вверх на рис. 1, б. Пусть  $\mathbf{G}(\mathbf{e}_{\tau\varphi}, \mathbf{e}_{n\varphi}, \mathbf{e}_{b\varphi})$  – это естественная сопутствующая НИСО, соответствующая углу поворота  $\varphi_e$  стрелы  $O_2B$  крана, причем вектор

$\mathbf{e}_{b\varphi} \parallel z_1$ , а вектор  $\mathbf{e}_{n\varphi}$  направлен из т.  $M$  к оси переносного вращения или к проекции т.  $O_2$  (т.  $D$ , т.  $E$ ) на горизонтальную плоскость ( $x_1y_1$ ).

Векторная теорема о сложении скоростей (12) принимает следующий вид:

$$\mathbf{V}_{M/E} = \mathbf{V}_{M/C} + \mathbf{V}_{M/D} + \boldsymbol{\omega}_{B/E} \times \mathbf{r}_{O_2/M}, \quad (25)$$

где  $\mathbf{V}_{M/C} = \mathbf{V}_{\alpha_1}$  и  $\mathbf{V}_{M/D} = \mathbf{V}_{\alpha_2}$  являются относительными скоростями в естественных сопутствующих НИСО  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{D}$ . Из (18) для  $\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_\varphi$ , а из (25) и рис. 1(б, г, е) для  $\mathbf{V}_{\alpha_1}$  и  $\mathbf{V}_{\alpha_2}$  следует, что можно получить следующие проекции скоростей:

$$\begin{cases} V_{\alpha_1} = l \frac{d\alpha_1}{dt}; \\ V_{\alpha_2} = l \sin(\alpha_1) \frac{d\alpha_2}{dt}; \\ V_\varphi = O_2M \frac{d\varphi_e}{dt}. \end{cases} \quad (26)$$

Дальнейший динамический анализ с применением второго закона Ньютона требует анализа ускорений груза  $M$ , показанного на рис. 1 (а, в, д).

Стандартное векторное уравнение для сложения ускорений груза  $M$  при сложном движении в ИСО  $\mathbf{E}$  имеет следующий вид:

$$\mathbf{a}_{M/E} = \mathbf{a}_{M/B} + \mathbf{a}_{E/E} + \boldsymbol{\omega}_{B/E} \times \mathbf{r}_{E/M} + \boldsymbol{\omega}_{B/E} \times (\boldsymbol{\omega}_{B/E} \times \mathbf{r}_{E/M}) + 2 \boldsymbol{\omega}_{B/E} \times \mathbf{V}_{M/B}. \quad (27)$$

В нашем случае мы полагаем, что т.  $E$  является полюсом для переносного движения груза, расположенной на вертикальной оси  $O_2z_2$ . Следовательно, второе слагаемое в (27) для ИСО  $\mathbf{E}$  и НИСО  $\mathbf{B}$  принимает вид:

$$\mathbf{a}_{E/E} = \mathbf{a}_{E/B} = 0. \quad (28)$$

Для дальнейшего анализа задачи на рис. 1(а, в, д) введем следующие обозначения.

Пусть  $\mathbf{a}_{M/E} = \mathbf{a}_{\text{abs}}$  – это ускорение т.  $M$  в ИСО  $\mathbf{E}$ , т.е. абсолютное ускорение груза  $M$ ;  $\mathbf{a}_{M/B} = \mathbf{a}_{M/F} = \mathbf{a}_r$  – это ускорение т.  $M$  в НИСО  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{F}$ , т.е. относительное ускорение груза  $M$ ;  $\mathbf{a}_{E/E} = \mathbf{a}_{D/E} = \mathbf{0}$  – это ускорение т.  $E$  и т.  $D$  в ИСО  $\mathbf{E}$ , т.е. абсолютные ускорения т.  $E$  и т.  $D$ , расположенных на оси вращения  $ED$ ;  $\mathbf{a}_e^\tau = \boldsymbol{\omega}_{B/E} \times \mathbf{r}_{E/M}$  – это касательное переносное ускорение груза  $M$ ;  $\mathbf{a}_e^n = \boldsymbol{\omega}_{B/E} \times (\boldsymbol{\omega}_{B/E} \times \mathbf{r}_{E/M})$  – это нормальное переносное ускорение груза  $M$ ;  $\mathbf{a}_{\text{cor}} = 2 \boldsymbol{\omega}_{B/E} \times \mathbf{V}_{M/B}$  – это Кориолисово ускорение груза  $M$ .

Т. о., принимая во внимание (28), уравнение (27) в ИСО  $\mathbf{E}$  имеет следующий вид:

$$\mathbf{a}_{\text{abs}} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_e^\tau + \mathbf{a}_e^n + \mathbf{a}_{\text{cor}}. \quad (29)$$

Уравнения (27) и (29) содержат следующие ускорения:

Вектор относительного ускорения груза  $M$  в НИСО  $\mathbf{B}$  определяется как:

$$\mathbf{a}_r = \mathbf{a}_{M/B} = \left( d^2 x_1 / dt^2 \right) \tilde{\mathbf{e}}_1 + \left( d^2 y_1 / dt^2 \right) \tilde{\mathbf{e}}_2 + \left( d^2 z_1 / dt^2 \right) \tilde{\mathbf{e}}_3. \quad (30)$$

Вектор касательного переносного ускорения  $\mathbf{a}_e^\tau$  груза  $M$  имеет такое же направление, что и вектор  $\mathbf{V}_e$  переносной скорости груза, т. е.  $\mathbf{a}_e^\tau \uparrow \uparrow \mathbf{V}_e$  и в НИСО  $\mathbf{B}$  определяется как:

$$\mathbf{a}_e^{\tau} = \boldsymbol{\alpha}_{B/E} \times \mathbf{r}_{E/M} = \left( -\left( \frac{d^2 \varphi_e}{dt^2} \right) (R + y_1) \right) \tilde{\mathbf{e}}_1 + \left( \left( \frac{d^2 \varphi_e}{dt^2} \right) x_1 \right) \tilde{\mathbf{e}}_2. \quad (31)$$

Вектор нормального или центростремительного переносного ускорения  $\mathbf{a}_e^n$  груза  $M$  направлен к оси  $O_2z_2$  и в то же самое время  $\mathbf{a}_e^{\tau}$  и  $\mathbf{a}_e^n$  являются компланарными векторами, расположенными в горизонтальной плоскости  $(x_2y_2)$ , где:

$$\mathbf{a}_e^n = \boldsymbol{\omega}_{B/E} \times (\boldsymbol{\omega}_{B/E} \times \mathbf{r}_{E/M}) = \left( -\left( \frac{d\varphi_e}{dt} \right)^2 x_1 \right) \tilde{\mathbf{e}}_1 - \left( \left( \frac{d\varphi_e}{dt} \right)^2 (R + y_1) \right) \tilde{\mathbf{e}}_2. \quad (32)$$

Вектор Кориолисова ускорения груза  $M$  направлен согласно правилу векторного произведения и определяется как:

$$\mathbf{a}_{cor} = 2 \boldsymbol{\omega}_{B/E} \times \mathbf{V}_{M/B} = \left( -2 \left( \frac{d\varphi_e}{dt} \right) \left( \frac{dy_1}{dt} \right) \right) \tilde{\mathbf{e}}_1 + \left( 2 \left( \frac{d\varphi_e}{dt} \right) \left( \frac{dx_1}{dt} \right) \right) \tilde{\mathbf{e}}_2. \quad (33)$$

В сферических координатах ускорение груза  $M$  представляет собой функцию угловых параметров, причем теорема о сложении ускорений в ИСО  $\mathbf{E}$  запишем в виде:

$$\mathbf{a}_{M/E} = \mathbf{a}_{M/C} + \mathbf{a}_{M/D} + 2 \boldsymbol{\omega}_{C/E} \times \mathbf{V}_{M/C} + 2 \boldsymbol{\omega}_{D/E} \times \mathbf{V}_{M/D} + \boldsymbol{\omega}_{D/E} \times (\boldsymbol{\omega}_{D/E} \times \mathbf{r}_{O_2/M}) + \boldsymbol{\alpha}_{D/E} \times \mathbf{r}_{O_2/M}, \quad (34)$$

где  $\mathbf{a}_{M/C}$  и  $\mathbf{a}_{M/D}$  – это ускорения т.  $M$  в НИСО  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{D}$  соответственно, т.е. относительные ускорения, соответствующие двум угловым относительным координатам  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ ; 3е и 4е слагаемые  $\mathbf{a}_{cor}(\mathbf{V}_{M/C}) = \mathbf{a}_{cor}(\mathbf{V}_{\alpha_1}) = 2 \boldsymbol{\omega}_{C/E} \times \mathbf{V}_{M/C} = 2 \boldsymbol{\omega}_{C/E} \times \mathbf{V}_{\alpha_1}$  и  $\mathbf{a}_{cor}(\mathbf{V}_{M/D}) = \mathbf{a}_{cor}(\mathbf{V}_{\alpha_2}) = 2 \boldsymbol{\omega}_{D/E} \times \mathbf{V}_{M/D} = 2 \boldsymbol{\omega}_{D/E} \times \mathbf{V}_{\alpha_2}$  – это Кориолисовы ускорения, соответствующие углам  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ ; последние два слагаемых в (34) – это нормальная и касательная составляющие переносного ускорения груза, зависящие от  $d\varphi_e/dt$  и  $d^2\varphi_e/dt^2$  соответственно.

Т. о. формула (34) может быть представлена в следующем виде:

$$\mathbf{a}_{M/E} = \mathbf{a}_{M/C} + \mathbf{a}_{M/D} + \mathbf{a}_{cor}(\mathbf{V}_{\alpha_1}) + \mathbf{a}_{cor}(\mathbf{V}_{\alpha_2}) + \boldsymbol{\omega}_{D/E} \times (\boldsymbol{\omega}_{D/E} \times \mathbf{r}_{O_2/M}) + \boldsymbol{\alpha}_{D/E} \times \mathbf{r}_{O_2/M}. \quad (35)$$

Направления слагаемых векторов в (35) показаны на рис. 1 (б, г, е).

Величины векторов угловых скоростей  $\boldsymbol{\omega}_{C/E}$  и  $\boldsymbol{\omega}_{D/E}$  приведены ниже:

$$\omega_{D/E} = \frac{d\varphi_e}{dt}; \quad (36)$$

$$\omega_{C/E} = \frac{d\varphi_e}{dt} + \frac{d\alpha_2}{dt}. \quad (37)$$

Принимая во внимание (36) и (37), получим следующие выражения для величин ускорений Кориолиса в естественных сопутствующих НИСО  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$ .

$$a_{cor}(V_{\alpha_1}) = 2l \left( \frac{d\alpha_1}{dt} \right) \left( \frac{d\varphi_e}{dt} + \frac{d\alpha_2}{dt} \right) \cos(\alpha_1); \quad (38)$$

$$a_{cor}(V_{\alpha_2}) = 2l \left( \frac{d\alpha_2}{dt} \right) \left( \frac{d\varphi_e}{dt} \right) \sin(\alpha_1). \quad (39)$$

Касательные ускорения в НИСО  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$  имеют следующий вид:



$$a_{\tau\alpha_1} = \left( \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} \right) l; \quad (40)$$

$$a_{\tau\alpha_2} = \left( \frac{d^2\alpha_2}{dt^2} \right) l \sin(\alpha_1); \quad (41)$$

$$a_{\tau\varphi} = \left( \frac{d^2\varphi_e}{dt^2} \right) (O_2M). \quad (42)$$

Нормальные ускорения в НИСО  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{G}$  могут быть записаны как:

$$a_{n\alpha_1} = \left( \frac{d\alpha_1}{dt} \right)^2 l; \quad (43)$$

$$a_{n\alpha_2} = \left( \frac{d\alpha_2}{dt} \right)^2 l \sin(\alpha_1); \quad (44)$$

$$a_{n\varphi} = \left( \frac{d\varphi_e}{dt} \right)^2 (O_2M). \quad (45)$$

Геометрическая связь, наложенная на груз  $M$ , показана на рис. 1 в виде троса  $BM$ . Длина  $l = l_{BM} = \|\mathbf{r}_{B/M}\|$  троса определяет геометрическую связь в виде:

$$l^2 = x_1^2 + y_1^2 + (z_1 - l)^2. \quad (46)$$

На основании рис. 1, д можно записать, что:

$$l^2 = (l \sin(\alpha_1) \cos(\alpha_2))^2 + (l \sin(\alpha_1) \sin(\alpha_2))^2 + (l \cos(\alpha_1))^2, \quad (47)$$

где углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  на рис. 1 – это угловые координаты сферического маятника  $M$ .

Сравнение (46) и (47) позволяет определить координаты  $x_1$ ;  $y_1$ ;  $z_1$  в НИСО  $\mathbf{B}$  как:

$$\begin{cases} x_1 = l \sin(\alpha_1) \cos(\alpha_2); \\ y_1 = l \sin(\alpha_1) \sin(\alpha_2); \\ z_1 = l - l \cos(\alpha_1). \end{cases} \quad (48)$$

На основании (48) геометрическая связь (46)–(47) может быть записана как:

$$l^2 \sin^2(\alpha_1) = x_1^2 + y_1^2; \quad z_1 = l - l \cos(\alpha_1). \quad (49)$$

Уравнение (49) определяет следующие частные производные угла  $\alpha_1$  по декартовым координатам  $x_1$ ;  $y_1$ ;  $z_1$  в НИСО  $\mathbf{B}$  как:

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} = \frac{x_1}{l^2 \sin(\alpha_1) \cos(\alpha_1)}; \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_1} = \frac{y_1}{l^2 \sin(\alpha_1) \cos(\alpha_1)}; \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial z_1} = \frac{1}{l \sin(\alpha_1)}. \end{cases} \quad (50)$$

Абсолютные координаты  $x_2, y_2, z_2$  в ИСО  $\mathbf{E}$ , которые зависят от относительных координат  $x_1, y_1, z_1$  в НИСО  $\mathbf{B}$ , при раскачивании груза  $M$  определяются как:

$$\begin{cases} x_2 = (R + y_1)\cos(\varphi_e) + x_1 \sin(\varphi_e); \\ y_2 = (R + y_1)\sin(\varphi_e) - x_1 \cos(\varphi_e); \\ z_2 = z_1 = l - l \cos(\alpha_1). \end{cases} \quad (51)$$

Среди сил, действующих на груз  $M$  (рис. 1), в декартовых координатах различают:  $\mathbf{mg}$  – это активная сила тяжести, направленная вертикально вниз;  $\mathbf{N}$  – это реакция троса;  $\Phi_e^\tau$  – это касательная сила инерции;  $\Phi_e^n$  – это нормальная или центробежная сила инерции и  $\Phi_{\text{cor}}$  – это сила инерции Кориолиса. Учитывая соотношения (27)–(45), приведем ниже векторные выражения для всех приложенных к грузу сил в НИСО  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{mg} = (-mg) \tilde{\mathbf{e}}_3; \quad (52)$$

$$\mathbf{N} = -N(x_1/l) \tilde{\mathbf{e}}_1 - N(y_1/l) \tilde{\mathbf{e}}_2 - N((z_1 - l)/l) \tilde{\mathbf{e}}_3; \quad (53)$$

$$\Phi_e^n = (-m)\mathbf{a}_e^n = \left( m \left( \frac{d\varphi_e}{dt} \right)^2 x_1 \right) \tilde{\mathbf{e}}_1 + \left( m \left( \frac{d\varphi_e}{dt} \right)^2 (R + y_1) \right) \tilde{\mathbf{e}}_2; \quad (54)$$

$$\Phi_e^\tau = (-m)\mathbf{a}_e^\tau = \left( m \left( \frac{d^2\varphi_e}{dt^2} \right) (R + y_1) \right) \tilde{\mathbf{e}}_1 - \left( m \left( \frac{d^2\varphi_e}{dt^2} \right) x_1 \right) \tilde{\mathbf{e}}_2; \quad (55)$$

$$\Phi_{\text{cor}} = (-m)\mathbf{a}_{\text{cor}} = \left( 2m \left( \frac{d\varphi_e}{dt} \right) \left( \frac{dy_1}{dt} \right) \right) \tilde{\mathbf{e}}_1 - \left( 2m \left( \frac{d\varphi_e}{dt} \right) \left( \frac{dx_1}{dt} \right) \right) \tilde{\mathbf{e}}_2, \quad (56)$$

где  $-(x_1/l)$ ;  $-(y_1/l)$  и  $-((z_1 - l)/l)$  представляют собой направляющие косинусы силы натяжения троса  $\mathbf{N}$  в НИСО  $\mathbf{B}$ . Реакция троса  $\mathbf{N}$  направлена из т.  $M$  в т.  $B$ , т. е. сила реакции  $\mathbf{N} \uparrow \downarrow \mathbf{r}_{B/M}$  противоположно направлена к радиус-вектору  $\mathbf{r}_{B/M}$  (3).

Рассмотрим внешние силы, наложенные на систему «вращающаяся стрела – груз».

Вращательное движение механической системы «стрела крана  $BO_2$  – груз  $M$ » на рис. 1 определяется векторным уравнением для скорости изменения кинетического момента  $\mathbf{H}_3^{O_2}$  для системы «стрела крана  $BO_2$  – груз  $M$ » по отношению к точке  $O_2$  ИСО  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{E} \, d\mathbf{H}_3^{O_2}/dt = \sum \mathbf{M}^{O_2}. \quad (57)$$

Векторное уравнение (57) содержит следующие составляющие:

$$\mathbf{H}_3^{O_2} = I_{33}^{O_2} \boldsymbol{\omega}_{B/E}; \quad (58)$$

$$I_{33}^{O_2} = (I_{33}^{O_2})_{BO_2} + m(x_1^2 + (R + y_1)^2); \quad (59)$$

$$\sum \mathbf{M}^{O_2} = \mathbf{M}_{DT}^{O_2} - \mathbf{M}_{FT}^{O_2} = (M_{DT}^{O_2} - M_{FT}^{O_2}) \hat{\mathbf{e}}_3, \quad (60)$$

где  $(I_{33}^{O_2})_{BO_2}$  – это элемент тензора массового момента инерции для стрелы крана  $BO_2$  в ИСО  $\mathbf{E}$  относительно оси  $\hat{\mathbf{e}}_3$ ;

$m(x_1^2 + (R + y_1)^2)$  – это элемент массового момента инерции для груза  $M$  в ИСО  $\mathbf{E}$  относительно оси  $\hat{\mathbf{e}}_3$ ;

$\mathbf{H}_3^{O_2} = I_{33}^{O_2} \boldsymbol{\omega}_{B/E}$  – это кинетический момент системы «стрела крана  $BO_2$  – груз  $M$ »;

$\Sigma \mathbf{M}^{O_2} = M^{O_2} \hat{\mathbf{e}}_3$  – это вектор результирующего момента внешних сил вдоль оси вращения  $\hat{\mathbf{e}}_3$ ;

$M_{DT}^{O_2}$  – это величина и  $\mathbf{M}_{DT}^{O_2} = M_{DT}^{O_2} \hat{\mathbf{e}}_3$  – это вектор приводного момента системы по отношению к т.  $O_2$  ИСО  $\mathcal{E}$ ,

$M_{FT}^{O_2}$  – это величина и  $\mathbf{M}_{FT}^{O_2} = M_{FT}^{O_2} \hat{\mathbf{e}}_3$  – это вектор момента трения для системы по отношению к т.  $O_2$  ИСО  $\mathcal{E}$ .

Внешний момент силы тяжести  $\mathbf{M}^{O_2}(\mathbf{mg}) = 0$  в (60) ввиду того, что  $\mathbf{mg} \uparrow \downarrow \hat{\mathbf{e}}_3$ . Для системы «стрела крана  $BO_2$  – груз  $M$ » сила реакции троса  $\mathbf{N}$  – это внутренняя сила. Поэтому в уравнениях (57) и (60) имеем  $\mathbf{M}^{O_2}(\mathbf{N}) = 0$ .

Подстановка (58)–(60) в (57) приводит к следующему скалярному уравнению для скорости изменения кинетического момента  $H_3^{O_2}$  для системы «стрела крана  $BO_2$  – груз  $M$ » по отношению к точке  $O_2$  ИСО  $\mathcal{E}$ .

$$\frac{d}{dt} \left( \left( (I_{33}^{O_2})_{BO_2} + m(x_1^2 + (R + y_1)^2) \right) \left( \frac{d\varphi_e}{dt} \right) \right) = M_{DT}^{O_2} - M_{FT}^{O_2}, \quad (61)$$

где приводной момент  $M_{DT}^{O_2}$  и момент трения  $M_{FT}^{O_2}$  – это технически заданные функции для конкретных систем электроприводов.

Запишем величины касательных  $\Phi_{\tau\alpha_1}$ ;  $\Phi_{\tau\alpha_2}$ ;  $\Phi_{\tau\varphi}$ , нормальных  $\Phi_{n\alpha_1}$ ;  $\Phi_{n\alpha_2}$ ;  $\Phi_{n\varphi}$ , и Кориолисовых  $\Phi_{cor}(V_{\alpha_1})$  и  $\Phi_{cor}(V_{\alpha_2})$  Даламберовых сил инерции, «приложенных» к грузу  $M$  в относительных сферических координатах, относящихся к ИСО  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$  и  $\mathcal{E}$ .

$$\Phi_{\tau\alpha_1} = ma_{\tau\alpha_1} = m \left( \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} \right) l; \quad (62)$$

$$\Phi_{\tau\alpha_2} = ma_{\tau\alpha_2} = m \left( \frac{d^2\alpha_2}{dt^2} \right) l \sin(\alpha_1); \quad (63)$$

$$\Phi_{\tau\varphi} = ma_{\tau\varphi} = m \left( \frac{d^2\varphi_e}{dt^2} \right) \|O_2M\|; \quad (64)$$

$$\Phi_{n\alpha_1} = ma_{n\alpha_1} = m \left( \frac{d\alpha_1}{dt} \right)^2 l; \quad (65)$$

$$\Phi_{n\alpha_2} = ma_{n\alpha_2} = m \left( \frac{d\alpha_2}{dt} \right)^2 l \sin(\alpha_1); \quad (66)$$

$$\Phi_{n\varphi} = ma_{n\varphi} = m \left( \frac{d\varphi_e}{dt} \right)^2 \|O_2M\|; \quad (67)$$

$$\Phi_{cor}(V_{\alpha_1}) = ma_{cor}(V_{\alpha_1}) = 2ml \left( \frac{d\alpha_1}{dt} \right) \left( \frac{d\varphi_e}{dt} + \frac{d\alpha_2}{dt} \right) \cos(\alpha_1); \quad (68)$$

$$\Phi_{cor}(V_{\alpha_2}) = ma_{cor}(V_{\alpha_2}) = 2ml \left( \frac{d\alpha_2}{dt} \right) \left( \frac{d\varphi_e}{dt} \right) \sin(\alpha_1). \quad (69)$$

На основании (52)–(56) выведем полностью нелинейные уравнения для раскачивания груза  $M$  в относительных декартовых координатах НИСО  $\mathbf{B}$ . Векторное дифференциальное уравнение динамической теоремы Кориолиса для груза  $M$  в НИСО  $\mathbf{B}$  имеет следующий вид:

$$m\mathbf{a}_{M/B} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \Phi_e^n + \Phi_e^\tau + \Phi_{\text{cor}}; \quad (70)$$

$$m\mathbf{a}_{M/B} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} + (-m)(\boldsymbol{\omega}_{B/E} \times (\boldsymbol{\omega}_{B/E} \times \mathbf{r}_{E/M})) + (-m)(\boldsymbol{\alpha}_{B/E} \times \mathbf{r}_{E/M}) + (-m)(2\boldsymbol{\omega}_{B/E} \times \mathbf{V}_{M/B}). \quad (71)$$

Векторное дифференциальное уравнение (70)–(71) приводит к трем скалярным обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ) для раскачивания груза  $M$ . Для этого спроецируем (70) и (71) на оси  $x_1, y_1, z_1$  в НИСО  $\mathbf{B}$ :

$$\begin{cases} m\left(\frac{d^2 x_1}{dt^2}\right) = -N\left(\frac{x_1}{l}\right) + m\left(\frac{d\varphi_e}{dt}\right)^2 x_1 + m\left(\frac{d^2 \varphi_e}{dt^2}\right)(R + y_1) + 2m\left(\frac{d\varphi_e}{dt}\right)\left(\frac{dy_1}{dt}\right); \\ m\left(\frac{d^2 y_1}{dt^2}\right) = -N\left(\frac{y_1}{l}\right) + m\left(\frac{d\varphi_e}{dt}\right)^2 (R + y_1) - m\left(\frac{d^2 \varphi_e}{dt^2}\right)x_1 - 2m\left(\frac{d\varphi_e}{dt}\right)\left(\frac{dx_1}{dt}\right); \\ m\left(\frac{d^2 z_1}{dt^2}\right) = -mg + N\left(\frac{l - z_1}{l}\right). \end{cases} \quad (72)$$

Полученная система (72) – это нелинейная система ОДУ. Нелинейность (72) определяется наличием неизвестной функции  $N = N(x_1, y_1, z_1, t)$  для усилия троса, переменным углом  $\varphi_e$  поворота стрелы, переменной угловой скоростью стрелы  $d\varphi_e/dt$ , и переменным угловым ускорением  $d^2\varphi_e/dt^2$ .

Для проверки корректности записанной системы (72) применим уравнения Лагранжа второго рода. Учитывая уравнения (10), (11) и (17) для квадрата  $(\mathbf{V}_{M/E}, \mathbf{V}_{M/E})$  абсолютной скорости груза  $M$ , и (59) для момента инерции, полное выражение для кинетической энергии для системы «вращающаяся стрела крана  $BO_2$  – груз  $M$ » принимает следующий вид:

$$T = \frac{m}{2} \left( \left( \left( \frac{dx_1}{dt} \right) - \left( \frac{d\varphi_e}{dt} \right) (R + y_1) \right)^2 + \left( \left( \frac{dy_1}{dt} \right) + \left( \frac{d\varphi_e}{dt} \right) x_1 \right)^2 + \left( \frac{dz_1}{dt} \right)^2 \right) + \frac{I_{33}^{O_2}}{2} \left( \frac{d\varphi_e}{dt} \right)^2. \quad (73)$$

Принимая во внимание нелинейность силы  $\mathbf{N}$  натяжения троса, и уравнения геометрических связей (46)–(50), получим формулы для обобщенных сил в НИСО  $\mathbf{B}$ :

$$\begin{cases} Q_{x_1} = -N\left(\frac{x_1}{l}\right); \\ Q_{y_1} = -N\left(\frac{y_1}{l}\right); \\ Q_{z_1} = +N\left(\frac{l - z_1}{l}\right) - mg. \end{cases} \quad (74)$$

Уравнения Лагранжа в НИСО  $\mathbf{B}$  имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = Q_{x_1}; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial y_1} = Q_{y_1}; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial z_1} = Q_{z_1}. \end{cases} \quad (75)$$

Применение (75) к (73) и (74) приводит к той же самой системе нелинейных ОДУ (72) в НИСО **B**, что подтверждает корректность записи полученных нелинейных ОДУ (72) для движения механической системы «вращающаяся стрела – груз».

Полностью нелинейная система ОДУ в относительных сферических координатах может быть записана посредством применения принципа Даламбера в НИСО **C**, **D** и **E** в проекциях на оси  $\mathbf{e}_{\tau\alpha_1}$  и  $\mathbf{e}_{\tau\alpha_2}$ :

$$\mathbf{e}_{\tau\alpha_1}: 0 = -\Phi_{\tau\alpha_1} + \Phi_{n\alpha_2} \cos(\alpha_1) + \Phi_{cor}(V_{\alpha_2}) \cos(\alpha_1) + \Phi_{n\varphi} \sin(\alpha_2 + \theta) \cos(\alpha_1) + \Phi_{\tau\varphi} \cos(\alpha_2 + \theta) \cos(\alpha_1) - mg \sin(\alpha_1) = 0; \quad (76)$$

$$\mathbf{e}_{\tau\alpha_2}: 0 = -\Phi_{\tau\alpha_2} - \Phi_{cor}(V_{\alpha_1}) + \Phi_{n\varphi} \cos(\alpha_2 + \theta) - \Phi_{\tau\varphi} \sin(\alpha_2 + \theta), \quad (77)$$

где

$$\sin(\theta) = \frac{l \sin(\alpha_1) \cos(\alpha_2)}{\|O_2M\|}, \quad \cos(\theta) = \frac{(R + l \sin(\alpha_1) \sin(\alpha_2))}{\|O_2M\|}. \quad (78)$$

В рамках первого приближения к решению нелинейной задачи (72) рассмотрим случай равномерного вращения стрелы  $BO_2$  крана. Положим, что стрела  $BO_2$  крана равномерно вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega_e$  вокруг вертикальной оси  $DO_2$ , т. е. что НИСО **B** равномерно вращается вокруг орта  $\hat{\mathbf{e}}_3$  ИСО **E**. Рассматриваемый случай имеет место, когда правая часть (61) равна нулю, т. е. для установившегося режима с:

$$\frac{d^2\varphi_e}{dt^2} = 0; \quad \frac{d\varphi_e}{dt} = \omega_e = const. \quad (79)$$

Т. о., учитывая (79), находим, что система (72) в НИСО **B** принимает следующий вид:

$$\begin{cases} m \left( \frac{d^2 x_1}{dt^2} \right) - m \left( \frac{d\varphi_e}{dt} \right)^2 x_1 - 2m \left( \frac{d\varphi_e}{dt} \right) \left( \frac{dy_1}{dt} \right) = -N \left( \frac{x_1}{l} \right); \\ m \left( \frac{d^2 y_1}{dt^2} \right) - m \left( \frac{d\varphi_e}{dt} \right)^2 (R + y_1) + 2m \left( \frac{d\varphi_e}{dt} \right) \left( \frac{dx_1}{dt} \right) = -N \left( \frac{y_1}{l} \right); \\ m \left( \frac{d^2 z_1}{dt^2} \right) = -mg + N \left( \frac{l - z_1}{l} \right). \end{cases} \quad (80)$$

Система (80) в НИСО **B** следует из (72) и (79), поскольку слагаемые системы (72), содержащие  $d^2\varphi_e/dt^2$ , принимают нулевые значения в первом и втором уравнениях системы ОДУ (72). Т. о. в первом и втором уравнениях (72) остаются слагаемые, линейно зависящие от координат  $x_1, y_1$  и скоростей  $dx_1/dt$  и  $dy_1/dt$ .

Согласно (49)  $h = l(1 - \cos(\alpha_1)) = z_1$  – это вертикальная координата груза в НИСО **B**.

Пусть  $\alpha_{1dyn}$  – это угловое расстояние между осью  $A_{st}z_1$  и линией  $BA_{dyn}$ .

Пусть  $y_{dyn} = l \sin(\alpha_{1dyn})$  – это длина перпендикуляра из т.  $A_{dyn}$  к оси  $A_{st}z_1$ .

Пусть  $\Delta = l(1 - \cos(\alpha_{1dyn}))$  – это расстояние вдоль оси  $z$  между т.  $A_{st}$  и  $A_{dyn}$ , т. е. вертикальное расстояние между горизонтальными плоскостями  $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2)$  и  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  в НИСО **B** и **F** соответственно.

Для дальнейшего механического анализа задачи раскачивания груза и для удобства построения аналитического решения линеаризованной системы введем НИСО  $\mathbf{F}$ . Составим условие динамического равновесия груза  $M$  в точке  $A_{dyn}$ , в которой момент силы тяжести  $\mathbf{mg}$  относительно точки  $B$  уравновешен моментом нормальной составляющей Даламберовой силы инерции от переносного движения  $\Phi_e^n$ , т. е.  $M_B(\mathbf{mg}) = M_B(\Phi_e^n)$ :

$$mgl \cdot \sin(\alpha_{1dyn}) = m\omega_e^2(R + l \cdot \sin(\alpha_{1dyn})) \cdot l \cdot \cos(\alpha_{1dyn}). \quad (81)$$

Начало НИСО  $\mathbf{F}$  поместим в точку  $A_{dyn}$  динамического равновесия груза  $M$ . При этом  $y$ -расстояние между НИСО  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{F}$  определяется численным решением трансцендентного алгебраического уравнения (81). Учитывая численно найденное из (81) значение угла  $\alpha_{1dyn}$  величина горизонтального расстояния  $y_{dyn}$  между т.  $A_{st}$  и т.  $A_{dyn}$  (рис. 1) определяется как:

$$y_{dyn} = l \sin(\alpha_{1dyn}). \quad (82)$$

Относительные координаты  $x, y, z$  в НИСО  $\mathbf{F}$  связаны с относительными координатами  $x_1, y_1, z_1$  в НИСО  $\mathbf{B}$  согласно следующим соотношениям (рис. 1):

$$\begin{cases} x_1 = x; \\ y_1 = y_{dyn} + y; \\ z_1 = \Delta + z. \end{cases} \quad (83)$$

С учетом (81)–(83) система (80) в НИСО  $\mathbf{F}$  принимает вид:

$$\begin{cases} m \left( \frac{d^2 x}{dt^2} \right) - m \left( \frac{d\varphi_e}{dt} \right)^2 x - 2m \left( \frac{d\varphi_e}{dt} \right) \left( \frac{dy}{dt} \right) = -N \left( \frac{x}{l} \right); \\ m \left( \frac{d^2 y}{dt^2} \right) - m \left( \frac{d\varphi_e}{dt} \right)^2 (R + y_{dyn} + y) + 2m \left( \frac{d\varphi_e}{dt} \right) \left( \frac{dx}{dt} \right) = -N \left( \frac{y_{dyn} + y}{l} \right); \\ m \left( \frac{d^2 z}{dt^2} \right) = -mg + N \left( \frac{l - \Delta - z}{l} \right). \end{cases} \quad (84)$$

Учитывая (79), уравнения (76)–(77) для НИСО  $\mathbf{B}$  в сферических координатах имеют вид:

$$\begin{cases} \left( \frac{d^2 \alpha_1}{dt^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{d\alpha_2}{dt} \right)^2 \sin(2\alpha_1) - \frac{1}{2} \omega^2 \sin(2\alpha_1) - \left( \frac{R}{l} \right) \omega^2 \cos(\alpha_1) \sin(\alpha_2) = - \left( \frac{g}{l} \right) \sin(\alpha_1); \\ \left( \frac{d^2 \alpha_2}{dt^2} \right) \sin(\alpha_1) + 2 \left( \frac{d\alpha_1}{dt} \right) \left( \omega + \left( \frac{d\alpha_2}{dt} \right) \right) \cos(\alpha_1) - \left( \frac{R}{l} \right) \omega^2 \cos(\alpha_2) = 0. \end{cases} \quad (85)$$

Обратимся к практически важному случаю малости угла раскачивания  $\alpha_l$ . В случае малого угла  $\alpha_l$  система (48) определяет  $x_l$  и  $y_l$  как малые переменные. Следовательно,  $z_l = 0$ .

Для  $z_l = 0$  приходим к выводу, что  $\Delta = 0$  и все производные по времени равны нулю, т. е. вертикальная скорость груза  $dz_l/dt = 0$ , и вертикальное ускорение груза  $d^2 z_l/dt^2 = 0$ .

Т. о. 3-е уравнение систем (72) и (80) показывает, что сила натяжения троса  $\mathbf{N}$  примерно совпадает с силой тяжести  $\mathbf{mg}$ , т. е.  $\mathbf{N} \approx \mathbf{mg}$ . Как результат, система (80), содержащая три ОДУ, преобразуется в линеаризованную систему с двумя независимыми уравнениями для относительных декартовых координат  $x_1$  и  $y_1$  в НИСО  $\mathbf{B}$ . После сокращения массы  $m$  груза  $M$  из системы уравнений (80) получаем следующую систему ОДУ:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} - \left(\frac{d\varphi_e}{dt}\right)^2 x_1 + g\left(\frac{x_1}{l}\right) - 2\left(\frac{d\varphi_e}{dt}\right)\left(\frac{dy_1}{dt}\right) = 0; \\ \frac{d^2 y_1}{dt^2} - \left(\frac{d\varphi_e}{dt}\right)^2 (R + y_1) + g\left(\frac{y_1}{l}\right) + 2\left(\frac{d\varphi_e}{dt}\right)\left(\frac{dx_1}{dt}\right) = 0. \end{cases} \quad (86)$$

Т. о. в НИСО **B** выведена система (86) ОДУ для относительного движения груза  $M$  на тросе  $BM$  с подвижной точкой  $B$  подвеса, прикрепленной к стреле  $BO_2$  крана. Перенесем начало системы координат  $Oxyz$  на рис. 1 (а, в, д) в точку  $A_{dyn}$  динамического равновесия груза  $M$ , т. е. выполним переход от НИСО **B** к НИСО **F** и упростим (83) к виду:

$$\begin{cases} x_1 = x; \\ y_1 = y_{dyn} + y; \\ z_1 = z. \end{cases} \quad (87)$$

Тогда второе уравнение системы (86) определяет величину динамического отклонения, т. е.  $y$ -расстояние между НИСО **B** и **F** как:

$$y_{dyn} = A_{st} A_{dyn} = \frac{\omega_e^2 R l}{g - \omega_e^2 l} = -\frac{\omega_e^2 R}{\left(\omega_e^2 - \left(\frac{g}{l}\right)\right)}, \quad (88)$$

где  $\omega_e = d\varphi_e/dt$ .

После подстановки (87) и (88) в (86) получаем нормальную систему двух линейных однородных ОДУ второго порядка для относительного движения груза  $M$  в НИСО **F**:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} - \left(\left(\frac{d\varphi_e}{dt}\right)^2 - \left(\frac{g}{l}\right)\right)x - 2\left(\frac{d\varphi_e}{dt}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0; \\ \frac{d^2 y}{dt^2} - \left(\left(\frac{d\varphi_e}{dt}\right)^2 - \left(\frac{g}{l}\right)\right)y + 2\left(\frac{d\varphi_e}{dt}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0. \end{cases} \quad (89)$$

Та же система ОДУ в НИСО **F** может быть получена из (84) для случая малого угла раскачивания  $\alpha_l$ . Принимая во внимание, что  $\omega_e = d\varphi_e/dt = const$  перепишем (89) как:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} - \left(\omega_e^2 - \left(\frac{g}{l}\right)\right)x - 2\omega_e\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0; \\ \frac{d^2 y}{dt^2} - \left(\omega_e^2 - \left(\frac{g}{l}\right)\right)y + 2\omega_e\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0. \end{cases} \quad (90)$$

Т. о. в относительных декартовых координатах выведена линейризованная система ОДУ (89)–(90) для случая равномерного вращения стрелы крана (79) и малого угла раскачивания  $\alpha_l$  (87). Соответствующая нелинейная система ОДУ (85) в случае равномерного вращения стрелы крана (79) получена в относительных сферических координатах.

## ВЫВОДЫ

В рамках решения основной задачи динамики об относительном раскачивании груза при повороте стрелы крана выполнен подробный кинематический анализ, связанный с определением скоростей и ускорений раскачивающегося груза в относительных прямоугольных и сферических координатах, а также приведены аналитические соотношения для активных действующих сил и Даламберовых сил инерции.

С применением методов классической механики составлена полностью нелинейная система ОДУ для относительных колебаний сферического маятника с тремя степенями свободы в случае равномерного вращения стрелы крана вокруг фиксированной вертикальной оси вращения в относительных декартовых и относительных сферических координатах.

Линеаризованные уравнения раскачивания груза в относительных картезианских координатах обоснованы и выведены с применением динамической теоремы Г. Г. Кориолиса и уравнений Лагранжа второго рода в рамках гипотез о равномерности вращения стрелы крана и малости относительного угла  $\alpha_1$  раскачивания груза.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ловейкін В. С. Нелінійні маятникові коливання вантажу на гнучкому підвісі при різних режимах обертання / В. С. Ловейкін, А. А. Бойко, Ю. В. Човнюк // Вісник ТНТУ (машинобудування, автоматизація виробництва та процеси механічної обробки). – 2010. – Т. 15. – № 3. – С. 41–48.
2. Кузьмин А. Н. Исследование колебаний груза на гибком подвесе при повороте крана / А. Н. Кузьмин, В. В. Суглобов, В. И. Федун // Захист металургійних машин від поломок : зб. наук. пр. – Маріуполь : ПДТУ, 2011. – Вип. 13. – С. 141–147.
3. Подобед В. А. Теоретические исследования основных показателей работы портального крана «Альбрехт» при динамическом воздействии ветра / В. А. Подобед // Вестник Мурманского государственного технического университета. – Мурманск : МГТУ, 2006. – Т. 9. – № 3. – С. 522–530. – ISSN 1560-9278.
4. Abdel-Rahman E. M. Dynamics and Control of Cranes: A Review / E. M. Abdel-Rahman, A. H. Nayfeh, Z. N. Masoud // Journal of Vibration and Control. – 2003. – Vol. 9. – N 7. – Pp. 863–908.
5. Blajer W. Dynamics and control of rotary cranes executing a load prescribed motion / W. Blajer, K. Kołodziejczyk // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. – 2006. – Vol. 44. – N 4. – Pp. 929–948.
6. Jerman B. The Comparison of the Accuracy of two Mathematical Models, concerning Dynamics of the Slewing Cranes / B. Jerman // FME Transactions. – 2006. – Vol. 34. – Pp. 185–192.
7. Ju F. Dynamic response of tower crane induced by the pendulum motion of the payload / F. Ju, Y. S. Choo, F. S. Cui // International Journal of Solids and Structures. – 2006. – Vol. 43. – N 2. – Pp. 376–389.
8. Maczyski A. Dynamics of a mobile crane and optimisation of the slewing motion of its upper structure / A. Maczyski, S. Wojciech // Nonlinear Dynamics. – 2003. – Vol. 32. – Pp. 259–290.
9. Mitrev R. Dynamic behaviour of a spherical pendulum with spatially moving pivot / R. Mitrev, B. Grigorov // Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej. Budowa Maszyn i Zarządzanie Produkcją. – 2008. – Vol. 9. – Pp. 81–91.
10. Sakawa Y. Optimal control of a rotary crane / Y. Sakawa, Y. Shindo, Y. Hashimoto // Journal of Optimization Theory and Applications. – 1981. – Vol. 35. – N 4. – Pp. 535–557.
11. Периг А. В. Численное математическое моделирование раскачивания поднимающегося груза при повороте стрелового крана / А. В. Периг, Е. А. Бондаренко // Вісник Донбаської державної машинобудівної академії : збірник наукових праць. – Краматорськ : ДДМА, 2012. – № 2 (27). – С. 158–163. – ISSN 1993-8322.
12. Периг А. В. О динамических режимах работы стрелового крана при постоянном угле вылета стрелы / А. В. Периг, А. Н. Стадник, И. А. Матвеев // Вісник Донбаської державної машинобудівної академії : збірник наукових праць. – Краматорськ : ДДМА, 2011. – № 4 (25). – С. 234–239. – ISSN 1993-8322.
13. Периг О. В. Горизонтальні коливання вантажу на тросі при рівномірному повороті стріли крану / О. В. Периг, О. М. Стадник, О. І. Дериглазов // Механіка та машинобудування. Науково-технічний журнал. – Харків : НТУ «ХПИ», 2012. – № 1. – С. 33–40. – Бібліогр. : с. 39–40. – ISSN 2078-7766.
14. Сферические колебания груза на стальном канате при равномерном вращении стрелы крана / А. В. Периг, А. Н. Стадник, А. И. Дериглазов, С. В. Подлесный // Строительные и дорожные машины. Ежемесячный научно-технический и производственный журнал. – Москва : ООО «СДМ-Пресс», 2013. – № 6. – С. 35–40. – Бібліогр. : с. 40. – ISSN 0039-2391.
15. Стадник А. Н. Применение относительных декартовых координат для сложного движения сферического маятника / А. Н. Стадник, А. В. Периг, А. И. Дериглазов // Вісник СевНТУ : збірник наукових праць. – Севастополь : Вид-во СевНТУ, 2013. – Вип. 137. – С. 24–31. – (Серія «Механіка, енергетика, екологія»). – Бібліогр. : С. 30–31.